8/12/15

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ // $a_i \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$, $a_n \neq 0$ $(I = \mathbb{R})$

<u>Θεώρημα 20</u>

(i) Εάν y: λύση της (E_0) τότε $\mathrm{Re}\,y$, $\mathrm{Im}\,y$ επίσης λύσεις της (E_0).
// $y(x) = \mathrm{Re}\,y(x) + i\,\mathrm{Im}\,y(x)$, $L(y(x)) = 0 = L[\mathrm{Re}\,y(x)] + i\,L[\mathrm{Im}\,y(x)]$
$\Rightarrow L[\mathrm{Re}\,y(x)] = 0 \wedge L[\mathrm{Im}\,y(x)] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,y(x), \mathrm{Im}\,y(x)$: λύση

(ii) αν y: λύση της (E_0) με $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ τότε η y είναι πραγματική λύση. // Ας είναι y: λύση της (E_0) με $y^{(i)}(x) \in \mathbb{R}$ $i = 0, \dots, n-1$. Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $z(x) = \mathrm{Im}\,y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (E_0) [από το (i)] με αρχικές τιμές $z^{(i)}(x_0) = \mathrm{Im}\,y^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$. Δηλαδή η z είναι λύση του ΠΑΤ : $L(z) = 0$

$$z^{(i)}(x_0) = 0, \ i = 0, \dots, n-1$$

συνεπώς η z είναι η μηδενική λύση (από Θεώρημα ύπαρξης-μονοσημάντου), δηλαδή είναι $\mathrm{Im}\,y(x) \equiv z(x) \equiv 0$ άρα y: πραγματική λύση //.

(iii) ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ένα ΘΣΛ: πραγματικών λύσεων τότε y: πραγματική λύση της (E_0) αν-ν $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ με $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$. // Έστω y: πραγματική λύση της (E_0) και $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ με $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση

(O=) $z = Im\, y(x)$ είναι μια πραγματική λύση της (E_0) και

$$z(x) = Im\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} Im\left(c_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\left(Im\, c_i\right)$$

δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} (Im\, c_i)\, y_i(x) = 0,\ x\in\mathbb{R} \xrightarrow[\text{ανεξάρτητες}]{y_i \text{ γραμμικώς}} Im\, c_i = 0,\ i=1,\dots,n$

δηλαδή $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ //

(iv) ΒΣΛ πραγματικών λύσεων της (E_0)

χ.π. $p(x) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$

Βρίσκω τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$\lambda_1,\dots,\lambda_{2r}$ $(\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k,\ k=1,\dots,r)$ ανά δύο συζυγείς, άρα άρτιος αριθμός διακεκριμένες μιγαδικές $(Im(\lambda_i)\neq 0)$ με πολλαπλότητες $m_1,\dots,m_r$

Καθαρά πραγματικές ρίζες διακεκριμένες, $\lambda_{2r+1},\dots,\lambda_s$

$x^j e^{\sigma_k \cdot x}\cos\tau_k x$, $j=0,\dots,m_k-1$
$x^j e^{\sigma_k \cdot x}\sin\tau_k x$, $k=1,\dots,r$

$x^j e^{rk}$, $j=0,\dots,m_k-1$ από τις πραγματικές
$k=2r+1,\dots,s$

• $p(\lambda) = (\lambda^2+1)^3(\lambda-1)^2(2\lambda+3)$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί σε 9ης τάξης εξίσωση

$\lambda_1 = i$ | $m_{1,2}=3$, $\lambda_3 = 1$ $m_3=2$, $\lambda_4 = -3/2$
$\lambda_2 = -i$ |

$$\left\{\begin{matrix} \cos x, x\cos x, x^2\cos x & e^x & e^{-3/2 x} \\ \sin x, x\sin x, x^2\sin x & xe^x & \end{matrix}\right\} \text{ΒΣΛ}$$

<u>Άσκηση 3.6</u> σελίδα 113

1(viii) $y''' - 13y' - 12y = 0$ $\qquad -1 \qquad \lambda_{1,2} = 4, -3$

$p(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0$

$= \lambda^3 - \lambda + 12\lambda - 12 = \lambda(\lambda^2-1) - 12(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2 \dots 12)$

$\{e^{-x}, e^{4x}, e^{-3x}\}$ ΒΣΛ

Άσκηση 2

$y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \sqrt{3}$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left\{ e^{-1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{-1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

$$y(x) = c_1 e^{-1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Θέλουμε $y(0) = 1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cancel{1} \cdot 0$

$y'(x) = \ldots$ και βρίσκω c_2.

· $a_n x^n y^{(n)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0$ (Euler) $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $x > 0$

$t = \log x$, $t \in \mathbb{R}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)^{= 1/x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) \Rightarrow x^2y'' = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

Με επαγωγή: $x^n y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^{(i)}y}{dt^2} \rightsquigarrow (E_0)'$: με σταθερούς συντελεστές

Άσκηση 6(i) σελίδα 114

$x^2y'' - xy' + y = 0$, $x > 0$

$t = \log x$

$$-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = 0 \rightsquigarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

χπ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ διπλή

ΒΣΛ της $(E_0)^1$ $\{e^t, te^t\}$

(E_0) $\{e^{\log x}, xe^{\log x}\} = \{x, x\log x\}$.

(iii) $(x-2)^2 y'' - (x-2)y' + y = 0$, $x>2$.

ή $t = \log(x-2)$ ή θεωρώ $z = x-2$ και δουλεύω όπως πριν.

<u>Άσκηση 7i)</u>

$x^2y'' - xy' + y = 0$, $x>0$.

$y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Αφού έχω βρει το ΒΣΛ, η λύση θα είναι : $y(x) = c_1 x + c_2 x\log x$

$y(1) = 1 \rightsquigarrow c_1 = 1$ $\qquad \rightsquigarrow y(x) = x$

$y'(1) = 0 \rightsquigarrow c_1 + c_2 = 0 \rightsquigarrow c_2 = -1$

• <u>Άσκηση Β-24</u> (άλυτων ασκήσεων)

Ας είναι $\{y_1, y_2\}$ ένα ΒΣΛ, πραγματικών λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$

$y'' + ay' + by = 0$.

Ν.δ.ο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1, υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_2.

Ας είναι x_1, x_2 δύο διαδοχικές ρίζες της y_1, δηλαδή

$y_1(x_1) = 0 = y_1(x_2)$ $\quad x_1 < x_2$

$y_1(x) \neq 0$, $x \in (x_1, x_2)$

$y_1'(x_1) \neq 0$, $y_1'(x_2) \neq 0$.

(Με εις άτοπο απαγωγή)

Υποθέτουμε ότι $y_2(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$

$\rightsquigarrow y_2(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2) \rightsquigarrow y_2(x) > 0, x \in [x_1, x_2]$ (διατηρεί πρόσημο)

$\rightsquigarrow z(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$

Θ.Rolle

$\underset{z(x_1)=z(x_2)=0}{\rightsquigarrow}$ $\exists \xi \in (x_1, x_2)$: $z'(\xi) = 0$

$\dfrac{y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_2'(\xi)y_1(\xi)}{y_2^2(\xi)} = 0$

$\rightsquigarrow W(y_1, y_2)(\xi) = 0$, άτοπο.

∃ ακριβώς μια ρίζα, διότι αν υπήρχε άλλη μια, θα ήταν ανάμεσα από τις ξ_1, ξ_2 και τότε δεν θα ήταν ~~διαδοχικές~~ διαδοχικές.

(Απλή εφαρμογή ~~για~~ ο ταλαντωτής: $y''+y=0$ με ρίζες $\cos x, \sin x$

Άσκηση Β.29 (άλυτων ασκήσεων)

(*) $y^{(5)}+y^{(4)}+\dots+y'+y=0$

(i) Να βρεθεί ένα ΒΣΛ

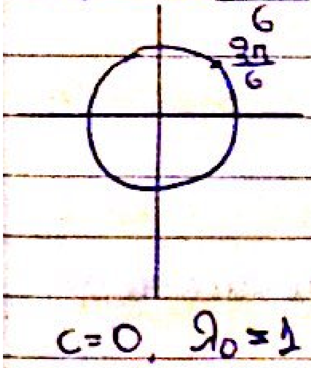
(ii) Ν.δ.ο το σύνολο των πραγματικών λύσεων της (*) που τείνουν στο 0 για $x \to \infty$ είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

(iii) βάση του χώρου.

(i) Χ.Π: $p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4+\dots+\lambda+1=0$

$\frac{(\lambda-1)p(\lambda)}{(\lambda-1)} = \frac{\lambda^6-1}{\lambda-1}$ έχουμε τις 6ες ρίζες της μονάδας εκτός από την μονάδα

$\lambda_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}$, $c=0,\dots,5$



έχουν απόσταση $\frac{2\pi}{6}$, ανά $60°$

$c=0$, $\lambda_0=1$

$c=1$, $\lambda_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow y_1(x)=e^{1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$,
$y_2(x)=e^{1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$c=2$, $\lambda_2 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow y_3(x)=e^{-1/2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$,
$y_4(x)=e^{-1/2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$c=3$, $\lambda_3 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = -1$, $y_5(x)=e^{-x}$

ΒΣΛ $= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα από θεώρημα, αλλιώς Wronsky σε ένα σημείο που μας βολεύει.

(ii) Αν y_1, y_2 λύσεις της (*) με $\lim y_i(x)=0$, $i=1,2$ στο $\mathbb{R}$

Θεωρώ S το $\{y: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y$: λύση της (E^*) στο $\mathbb{R}$ και
$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0\}$

$c_1 y_1 + c_2 y_2$ λύση στο S και ν.δ.ο $\to 0$.

(iii) S υπόχωρος του Β2Λ, παίρνω αυτές που τείνουν στο μηδέν. Αν $y \in S$ τότε $\to y$: λύση, $\lim_{+\infty} y(x) = 0$ $\to$

$$y(x) = c_1 e^{1/2x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{1/2x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-1/2x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 e^{-1/2x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_5 e^{-x}.$$

Ποιά πρέπει να είναι τα c_1, c_2 ώστε οι συναρτήσεις μου να πάνε στο 0; $c_1 = c_2 = 0$

$e^{1/2x}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] \to 0$

$x_\nu = \frac{2\nu\pi 2}{\sqrt{3}} \to +\infty \Rightarrow y(x_\nu) \to 0 \Rightarrow c_1 = 0$

για το c_2 παίρνω $x_\nu = \frac{2\nu\pi + \pi/2}{\sqrt{3}}$

γραμμικώς ανεξάρτητες, ο βασικός υπόχωρος έχει διάσταση 3.

Αν είχα $y^{(n)} + \dots + y' + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^n + \dots + \lambda + 1$ θα αλλάξει κάτι;

$p(\lambda) = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} \rightsquigarrow \lambda_k \cos\frac{2k\pi}{n+1}x + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}x$, $k = 0, \dots, n$ $\lambda_0 = 1$

Παίζει ρόλο αν το n είναι άρτιος ή περιττός.

$y^{(n)} - y^{(n-1)} + y^{(n-2)} + \dots (\pm) y = 0$

$\lambda^n - \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots (\pm)\lambda = 0$. Πρέπει να βρούμε την αντίστοιχη ταυτότητα.